F e r i e n k u r s

Analysis

Teil I

Sommer 2023

Deyke

Differenzialrechnung

mit ganzrationalen Funktionen

(kompakt)

Reellwertige Funktionen mit der nachfolgenden Zuordnung heißen ganzrational vom Grad n (n ist der höchste vorkommende Exponent mit $a_n \neq 0$)

$$f : x \longrightarrow a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Für derartige Funktionen gelten zwei bemerkenswerte und für die Praxis wichtige Sätze:

Satz 1 (Zerlegungssatz)

Ist f eine ganzrationale Funktion vom Grade n und a eine Stelle, so gibt es eine ganzrationale Funktion f_a vom Grade n-1 derart, dass

$$f(x) = (x - a) f_a(x) + f(a)$$

gilt. Die Koeffizienten von f_a stehen in der dritte Zeile des HORNER-Schemas vor dem Funktionswert f(a).

Der Zerlegungssatz hat eine "Zugabe":

Satz 2

Ist f eine ganzrationale Funktion vom Grade n und a eine Nullstelle von f , so gibt es eine ganzrationale Funktion f_a vom Grade n-1 derart, dass

$$f(x) = (x - a) f_a(x)$$

gilt.

Im Fall einer Nullstelle von f können wir die Funktion also als ein Produkt darstellen. Diese Aussage ist die entscheidende Hilfe bei der Suche nach Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen.

Satz 3

Ist f eine ganzrationale Funktion vom Grade n, so hat sie höchstens n Null-stellen.

Erinnerung an das „Tangentenproblem“

Was eine Tangente ist, wissen wir tatsächlich nur für den Kreis. Was eine Tangente an einem Funktionsgraphen ist, müssen wir sogar erst (sinnvoll) verabreden. Eine Tangente ist sicherlich eine Gerade, also der Graph einer linearen Funktion. Und sie muss die „richtige Steigung“ haben. Aber was ist Steigung?

Nur eine Gerade hat eine einheitliche Steigung. Bei der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 0{,}5\,x^2$ können wir an keiner Stelle a ein Steigungsdreieck anlegen, weil der Graph von f „gebogen“ und die Hypothenuse des Steigungsdreiecks „gerade“ ist. Dennoch können wir an der Stelle a = 1 ein Steigungsdreieck hinlegen, das den Punkt A (1 ; f(1)) enthält (siehe Abbildung 1). Der Quotient $\Delta y / \Delta x = 1{,}5 / 1{,}0 = 1{,}5$

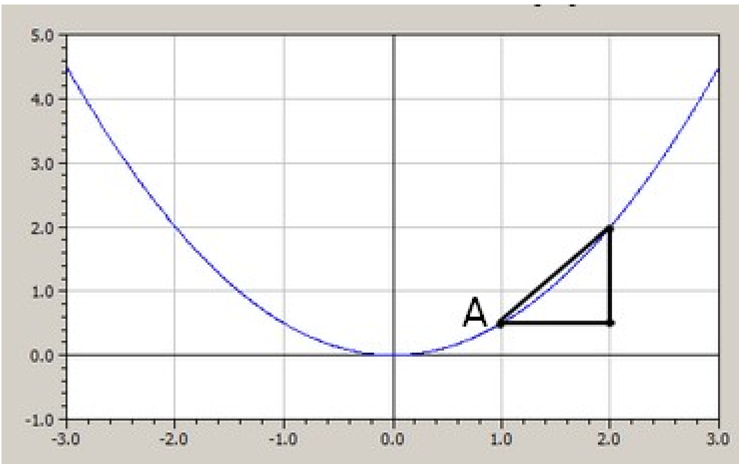


Abb. 1

beschreibt nur eine „<u>mittlere Steigung</u>“ im Punkt A (auch die „<u>Änderungsrate</u>“ der Funktion genannt). Wählen wir Δx kleiner, bekommen wir eine feinere Einschätzung der „mittleren Steigung“ von f im Punkt A. Wir benötigen jedoch eine exakt richtige Steigung und keine ungefähre, also mittlere Steigung für die Tangente.

Was können wir tun?

Die Bearbeitung der nachfolgenden Aufgabe wird helfen:

<u>Aufgabe</u>: A(a ; f(a)) ist ein Punkt auf der (speziellen) Parabel mit der Funktionsgleichung

$f(x) = k x^2 \quad (k > 0)$.

Gesucht ist eine lineare Funktion t, welche die Tangente an die Parabel im Punkt A beschreibt.

a) Erklären Sie den Ansatz

$t : x \dashrightarrow m(x - a) + ka^2$.

b) Die Steigung lässt sich mit folgender Idee bestimmen:

Man wählt in der Nähe von A einen Punkt P auf der Parabel, berechnet

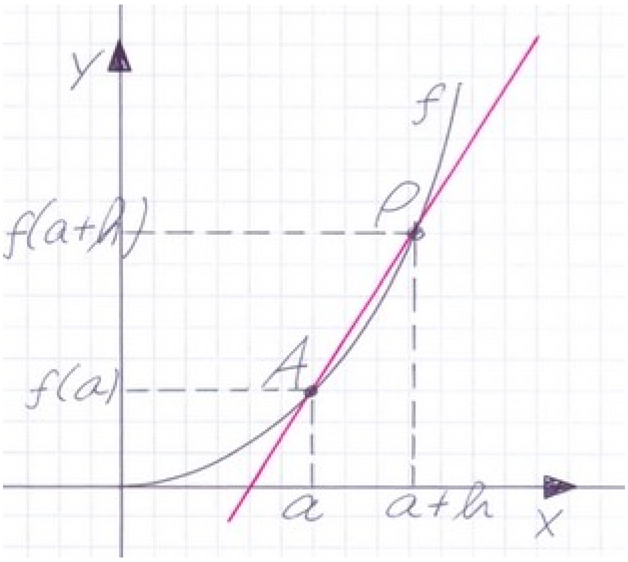


Abb. 1

die Steigung St(A,P) der Geraden durch A und P (einer Sekante der Parabel) und untersucht, was passiert, wenn man P immer näher an A heranschiebt (siehe Abb. 1). Für k = 1 und A(3 ; 9) erhält man:

$$\text{Stei}(A,P) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h,$$

also m = 6.

Erklären Sie diese Bestimmung von m.

Bestätigen Sie das Ergebnis für m dadurch, dass Sie zeigen:

Die Graphen von $f: x \dashrightarrow x^2$ und $t: x \dashrightarrow 6(x - 3) + 9$ haben genau einen gemeinsamen Punkt.

c) Übertragen Sie die Bestimmung von m auf den allgemeinen Fall.

<u>Lösung des Tangentenproblems (für diesen Spezialfall)</u>:

Die Tangente an die Parabel der Funktion $f : x \dashrightarrow k x^2$ im Punkt A(a ; ka^2) hat die Steigung 2ka. Sie wird durch die lineare Funktion $t : x \dashrightarrow 2ka(x - a) + ka^2$ beschrieben.

Verabredungen:

1) Wir sehen die Steigung der Tangente am Graphen der Funktion f im Punkt A(a; f(a)) als die "(lokale) Steigung der Funktion f an der Stelle a" an. (Nicht zu verwechseln mit der "mittleren Steigung" von f im Intervall [x_1 ; x_2]:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ .)}$$

2) Wir bezeichnen die Steigung von f an der Stelle a mit f '(a) und sagen auch „f'(a) ist die Ableitung von f an der Stelle a“. Das Berechnen der Ableitung der Funktion f nennt man das „Differenzieren“ der Funktion. (Das Berechnen der Ableitung einer Funktion ist ein Thema der Differenzialrechnung.)

3) Ist f eine reelle Funktion, die an jeder Stelle a ∊ ℝ eine (lokale) Steigung besitzt, so können wir zu f eine neue Funktion f ' bilden, welche jeder Stelle a ∊ ℝ die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle a (also die lokale Steigung von f) zuordnet:

   (6) $f': a \longrightarrow m(a) = f'(a)$.

   f ' heißt die „Ableitungsfunktion von f“ oder auch kurz „die Ableitung von f".

   Beispiel: $f(x) = 3x^4$

   $f'(a) = 12a^3$

Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen:

R 1: (Potenzregel) Die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^n$ hat die Ablei-tung $f'(x) = n\,x^{n-1}$. n ist eine natürliche Zahl (n ε **N**).

R 2: (Faktorenregel) Ist f das Produkt aus der Konstanten k und der Funktion g, also

$$f : x \longrightarrow k\ g(x),$$

so hat f die Ableitung: $f'(x) = k * g'(x)$. (Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren als Faktor erhalten.)

R 3: (Summenregel) Ist f die Summe zweier anderer Funktion, also $f(x) = g(x) + h(x)$, so hat f die Ableitung:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

(Eine Summe wird summandenweise differenziert.)

Wir können jetzt:

1) Jede beliebige ganzrationale Funktion an irgendeiner Stelle a differenzieren (ihre (lokale) Steigung) bestimmen. Und das machen wir am besten mit den drei Ableitungsregeln auf p. 4.

Beispiel:

Funktion: $f : x \dashrightarrow a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0$

Ableitungsfunktion: $f\,'(a) = n\, a_n\, a^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, a^{n-2} + ...\ a_1$

2) Die Tangente für eine ganzrationale Funktion f an beliebiger Stelle a berechnen:

Beispiel:

Funktion: $f(x) = 2\,x^4 - 4\,x^2$; Stelle: $a = -0{,}5$

Allgemeine Tangentengleichung: $t(x) = f\,'(a)\,(x - a) + f(a)$

Also: $f\,'(a) = 8\,a^3 - 8\,x$; $f\,'(-0{,}5) = 3{,}0$ und $f(-0{,}5) = -0{,}875$

Damit heißt die Gleichung der Tangente:

$t(x) = 3{,}0\,(x + 0{,}5) + -0{,}875 = \underline{3{,}0\,x + 0{,}625}$.

Zur Einübung:

A. Bestimme $f\,'(0)$, $f\,'(1)$, $f\,'(-1)$, $f\,'(3)$ und $f\,'(-3)$.

1) $f(x) = 4\,x^3 - 2\,x^2$ 2) $f(x) = 8\,x^3 - 4\,x^2 + 3\,x$

3) $f(x) = 8\,x^3 - 4\,x^2 + 3\,x - 7$ 4) $f(x) = 2\,x^6 - 3\,x^4$

B. Berechne die Gleichung der Tangentenfunktion t zur Funktion f an der Stelle a = 1 .

1) $f(x) = 8\,x^3 - 4\,x^2 + 3\,x$ 2) $f(x) = 9\,x^7 - 8\,x^4 + 3\,x - 2$

3) $f(x) = 2\,x^6 - 3\,x^4$

Eigenschaften einer Funktion

A. Monotonie:

Verabredung: Wenn bei einer Funktion f mit zunehmendem Argument x auch der Funktionswert f(x) zunimmt, nennt man die Funktion "streng monoton zunehmend", falls jedoch mit zunehmendem Argument x der Funktionswert f(x) abnimmt, heißt die Funktion "streng monoton abnehmend". (Genaueres siehe Lambacher Schweizer, Bd. 10, p. 211.) Das Monotonieverhalten einer Funktion ist ein abschnittsweises Verhalten, d.h. es gibt offene Intervallen] x_1 ; x_2 [, auf denen die Funktion entweder streng monoton zunehmend oder streng monoton abnehmend ist.

Beispiel: Die Quadratfunktion f : x ---> x^2 ist auf] - ∞ ; 0 [streng monoton abnehmend und auf] 0 ; ∞ [streng monoton zunehmend.

Kennt man das Monotonieverhalten einer Funktion, so kennt man auch ihre Hoch- und Tiefpunkte.

Begründung am Beispiel der Quadratfunktion f: Um die Intervalle mit einheitlichem Monotonieverhalten zu finden, sucht man die Nullstellen der Ableitungsfunktion f ': x ---> 2 x. x_1 = 0 ist die einzige Nullstelle der Ableitung. x_1 ist die Nahtstelle der beiden Intervalle I_1 :=] - ∞ ; 0 [und I_2 :=] 0 ; ∞ [. Auf I_1 ist f streng monoton abnehmend; damit ist gleichbedeutend, dass dort f '(x) < 0 ist. Auf I_2 ist f streng monoton zunehmend; gleichbedeutend damit ist, dass dort f '(x) > 0 gilt. Schematischer Überblick über die Vorzeichenverteilung der Ableitung:

----------------- X --------------------
x_1 x

An der Stelle x_1 = 0 liegt ein Vorzeichenwechsel - / + der Ableitung vor. Daher hat dort die Funktion f den bekannten Tiefpunkt (Scheitelpunkt).

*

(Ü 1) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten sowie die Hoch- und Tiefpunkte der folgenden Funktionen:

1.1 $$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 - 6x + 1$$

1.2 $$g(x) = x^2 + \frac{2}{x} \qquad (x \neq 0)$$

1.3 $$h(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

B. Wendepunkte:

Ein „**Wendepunkt einer Funktion f**“ ist ein Punkt W(a ; f(a)) auf dem Graphen von f, an dem sich die Krümmung von einer Links- in eine Rechtskrümmung bzw. von einer Rechts- in eine Linkskrümmung ändert. An der „**Wendestelle a**“ hat die (erste) Ableitung f ' von f offenbar ein (lokales) Extremum. Die nachfolgende Abbildung (*Abb.1*) zeigt die beiden Wendepunkte W_1 und W_2 der ganzrationalen Funktion:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 90x^2 - 17x + 1010 .$$

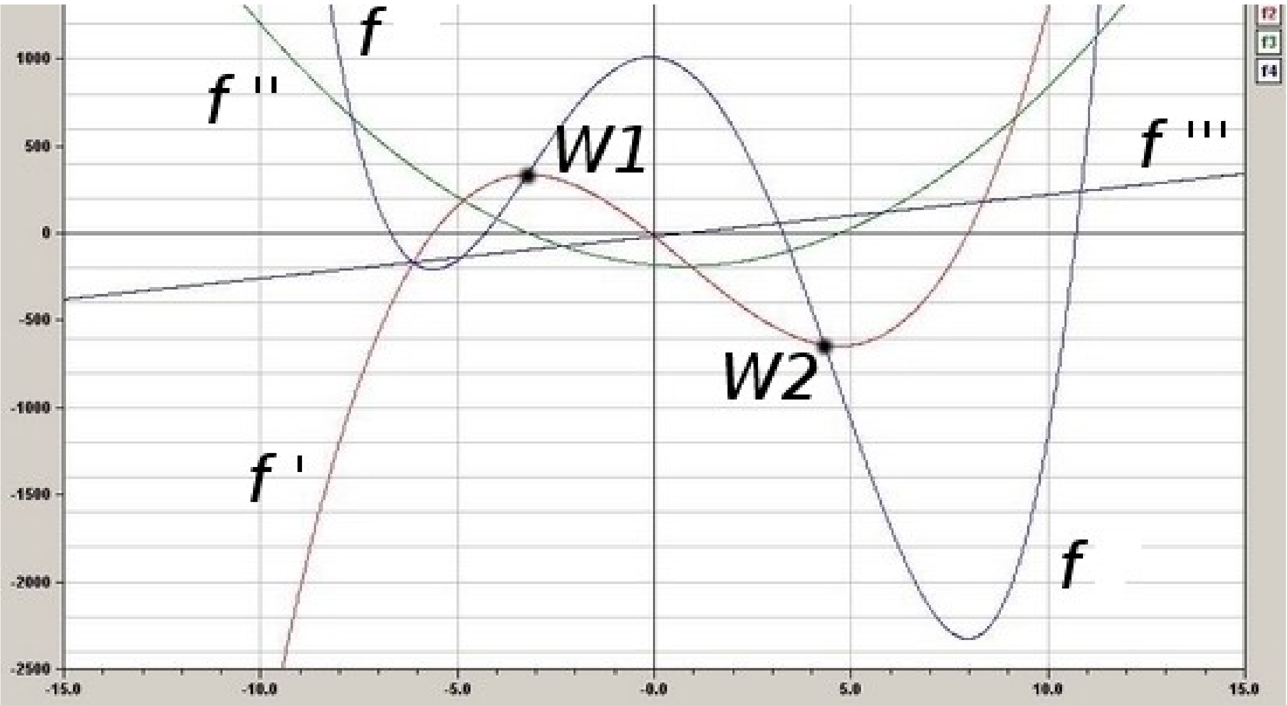


Abb.1

(Ü 2) Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktion f aus Abb. 1.

C. Hoch- und Tiefpunkte sowie Sattelpunkte:

Nach Abschnitt A ergeben sich die Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion direkt aus der Monotonie-Untersuchung einer Funktion, wenn man die Vorzeichenverteilung der Ableitung kennt. (Manchmal ist das allerdings ein Problem.)

In Abb. 1 macht man folgende Erfahrung: Bei dem einzigen Hochpunkt der Funktion hat ihre zweite Ableitung einen negativen Wert; bei den beiden Tiefpunkten hat die zweite Ableitung einen positiven Wert. Dies ist kein Zufall.

Wir stellen folgende Überlegung an:

Die Funktion f habe an der Stelle a einen Hochpunkt. Das geht nur, wenn an der Stelle a die Funktion eine horizontale Tangente hat, wenn also f '(a) = 0 ist. Jetzt sehen wir uns das lokale Verhalten der Ableitung f ' in der Nähe von a genauer an. Für x < a ist f '(x) > 0, denn die „Bergkuppe ist noch nicht erreicht“. Je näher wir a kommen, desto kleiner wird f '(x). Dann wird f '(x) gleich Null für x = a, wenn wir auf der „Bergkuppe“ angekommen sind. Jenseits von a, also für x > a, wird f '(x) noch kleiner, nämlich negativ. Die Ableitung von f zeigt also lokal um den Hochpunkt ein bestimmtes Monotonieverhalten: f ' nimmt streng monoton ab. Nach unseren Betrachtungen unter Abschnitt A gilt dann lokal um den Hochpunkt (f ')' = f '' ist negativ.

Wir haben also folgenden

Existenzsatz für Extremwerte differenzierbarer Funktionen:

Wenn f '(a) = 0 und <u>f ''(a)< 0</u>, dann hat f ein <u>lokales Maximum</u> an der Stelle a.

Entsprechend überlegt man sich den zweiten Teil des Existenzsatzes:

Wenn f '(a) =0 und <u>f ''(a) > 0</u>, dann hat f ein <u>lokales Minimum</u> an der Stelle a.

Stellen Sie diese Überlegung selber an.

Und wie sieht die Funktion an der Stelle a aus, wenn f '(a) = f ''(a) = 0 gilt? Dann liegt jedenfalls bei a weder ein Hoch- noch ein Tiefpunkt vor.

<u>Beispiel</u>: f(x) = $(x – 1)^3$

Es ist f '(x) = 3 $(x – 1)^2$, also f '(1) = 0 und f ''(x) = 6 (x -1) sowie f ''(1) = 0.

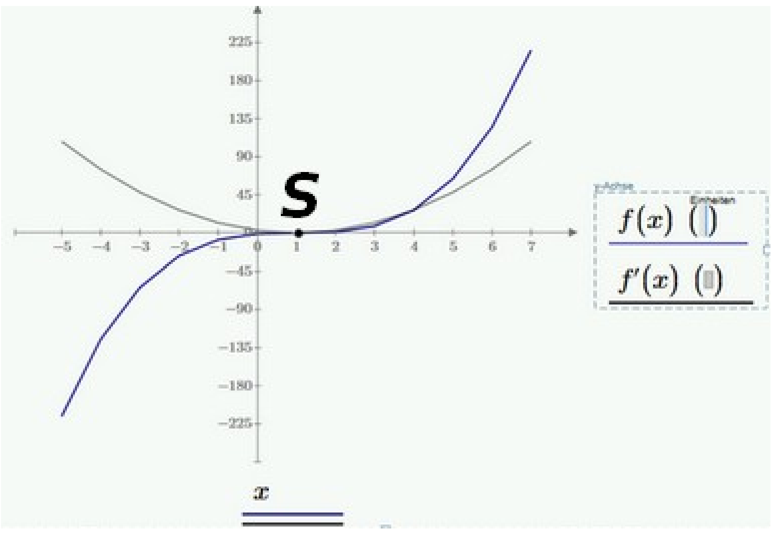


Abb. 2

Der Punkt S(1 ; 0) ist ein sog. **Sattelpunkt**.

D. Symmetrie einer Funktion:

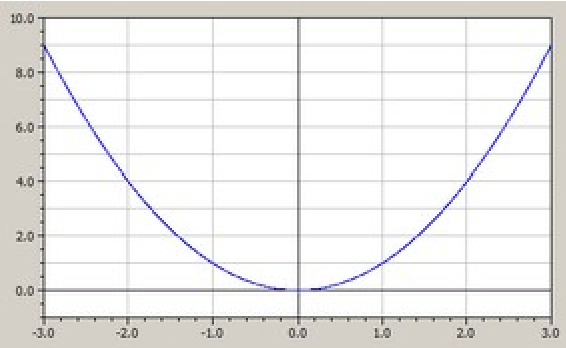


Abb. 3

$f(x) = x^2$

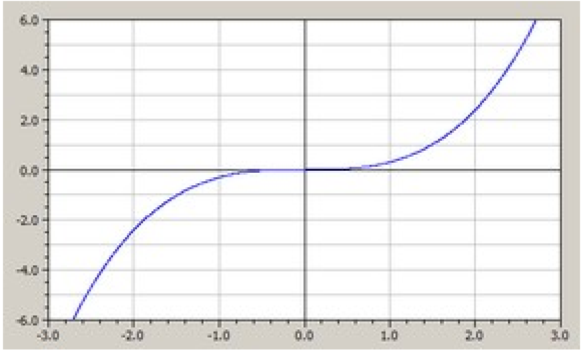


Abb. 4

$g(x) = 0{,}3\ x^3$

Der Graph der Funktion f (s. Abb. 3) ist symmetrisch zur y – Achse, der Graph der Funktion g (s. Abb. 4) ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Weiß man von einer Funktion schon, dass ihr Graph Symmetrie aufweist, dann verkürzt dies die Untersuchung der Funktion auf Extrempunkte, Wende- und Sattelpunkte erheblich (beachte auch (Ü 18)).

Kriterium für:

Symmetrie zur y – Achse: für alle x aus der Definitionsmenge der Funktion f gilt:

$$f(- x) \;=\; f(x).$$

Übergang von x zu – x ändert nicht den Funktionswert.

Punktsymmetrie zum Ursprung: für alle x aus der Definitionsmenge der Funktion f gilt:

$$f(- x) \;=\; - f(x).$$

Übergang von x zu – x ändert das Vorzeichen des Funktionswertes.

(Ü 3) Untersuchen Sie die nachfolgende Funktion f auf Monotonie, Extrempunkte, Wendepunkte und Sattelpunkte:

$$f(x) = 0{,}2\ x^4 – 1{,}8\ x^2 - 2$$

Nullstellensuche nach NEWTON

etwas beschleunigt

f sei eine Funktion mit der (unbekannten) Nullstelle x_N (siehe Abb. 5).

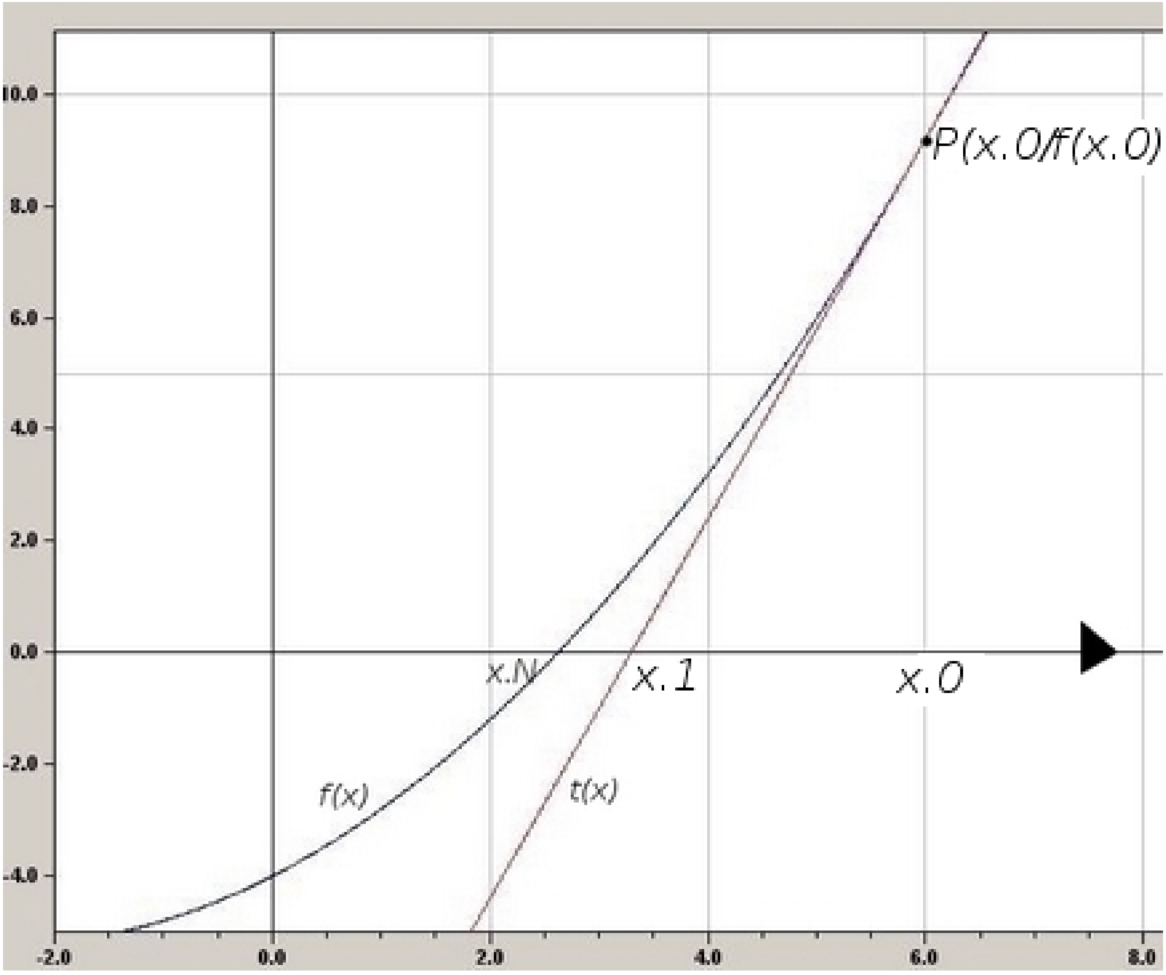


Abb. 5

Wir suchen eine gute Annäherung an x_N. Wir wählen aufs Geratewohl eine Stelle x_0 (Startwert). Wenn wir Glück haben, liegt sie in der „Nähe" von x_N. Da $f(x_0) \neq 0$ ist, versuchen wir eine bessere Annäherung an die Nullstelle zu finden. Wir gehen zum Graphenpunkt $P(x_0 ; f(x_0))$ und errichten dort die Tangente t am Graphen. Diese schneidet die x-Achse an der Stelle x_1. Offensichtlich ist x_1 eine bessere Annäherung an die Nullstelle als x_0. Um eine noch bessere Annäherung an x_N zu bekommen, wiederholen wir dasselbe Verfahren jetzt mit der Stelle x_1 anstatt x_0. Wir gehen zum Graphenpunkt mit den Koordinaten $(x_1 ; f(x_1))$, errichten dort die Tangente und nehmen ihre Schnittstelle x_2 mit der x – Achse als eine weiter verbesserte Annäherung an die Nullstelle. Das Verfahren setzen wir fort, bis wir eine hinreichend genaue Näherung für x_N gefunden haben.

(Ü 4)

4.1 Finden Sie eine Gleichung, mit der man x_1 aus dem sog. Startwert x_0 berechnen kann.

4.2 Verallgemeinern Sie das gefundene Ergebnis, indem Sie eine Gleichung formulieren, mit der man aus der Näherung x_n eine noch bessere Näherung x_{n+1} berechnen kann.

4.3 Eine Nullstellensuche:

Wir suchen die Nullstellen der Funktion

$$f: x \longrightarrow -0{,}05\,x^3 + x^2 + 40\,x - 220$$

in D_1. Die erste Nullstelle findet man mit dem NEWTON – Verfahren.

Tipp: Starte mit $x_o = 8$

*

Trigonometrische Funktionen

Für beliebig kleine bzw. große Winkel α wird verabredet: **sin α = y** (y-Koordinate des Punktes P) und **cos α = x** (x- Koordinate des Punktes P) – siehe *Abb. 6*. P liegt auf einem Einheitskreis, der Kreisradius r ist also „1“ (eine Längeneinheit; die konkrete Einheit wie m, km, mm, La wird unterdrückt). α wird gegen die positive x-Achse im Gegenuhrzeigersinn gemessen. Für $\alpha\ \varepsilon$] 0° ; 90° [ist diese Verabredung identisch mit der Definition von sin α und cos α im rechtwinkligen Dreieck. Überdies wird **tan α = y / x = sin α / cos α** verabredet. Für $\alpha\ \varepsilon$] 0° ; 90° [ist dies wieder die bekannte Definition im rechtwinkligen Dreieck.

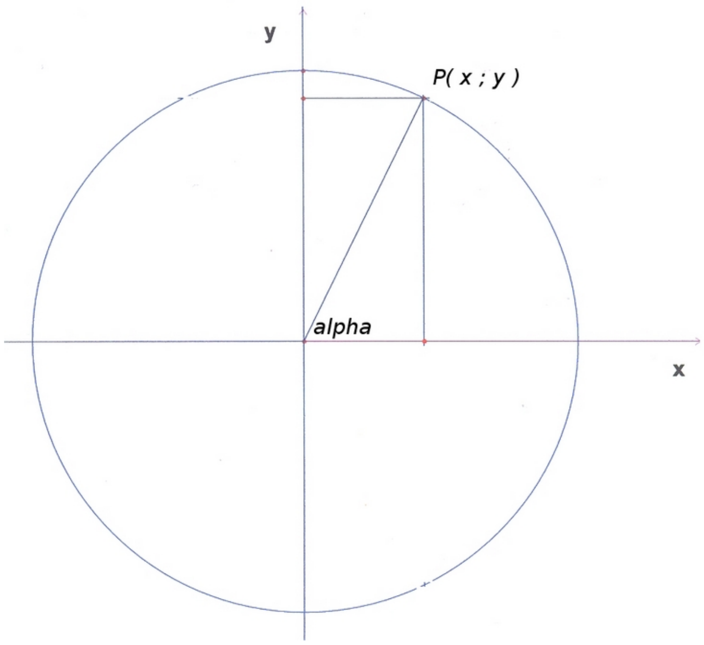


Abb. 6

Um mit diesen sog. trigonometrischen Funktionen Differenzialrechnung betreiben zu können, müssen die Funktionen reellwertige Argumente haben. Das Argument α wird aber bislang in „°“ gemessen. Wir haben also die Angabe des Winkels als reelle Zahl vorzunehmen. Dazu führt man das sog. **Bogenmaß** des Winkels ein.

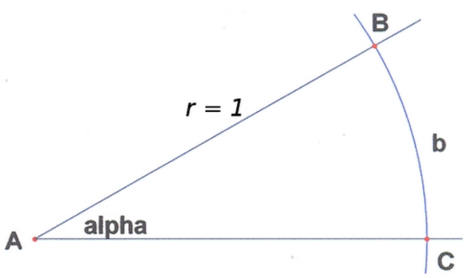


Abb. 7

Der Winkel α liegt zwischen einem Zweistrahl am Punkt A. Um A wird ein Einheitskreis (s.o.) gelegt; aus diesem schneidet der Zweistrahl einen (Kreis)bogen BC aus. Seine Länge b ist eine ebenso eindeutige Beschreibung des Winkels α wie seine Beschreibung in Grad. b ist das sog. **Bogenmaß des Winkels α** . Für die Umrechnung von α in Grad in α im Bogenmaß gilt offenbar:

$$(1) \qquad b = 2\pi * \frac{\alpha}{360°} = \alpha * \frac{\pi}{180°}$$

mit dem „Anteilsfaktor“ α / 360° (Anteil am gesamten Kreisumfang mit r = 1). Das Bogenmaß hat keine Einheit; α im Bogenmaß ist also eine einheitenlose reelle Zahl. Ersetzt man den „Bezeichner“ α durch x, so ist

$x \dashrightarrow \sin x$ (x ein Winkel im Bogenmaß)

eine reellwertige Funktion mit reellem Argument x. (Mit den anderen trigonometrischen Funktionen verfährt man analog.) Damit hat die Sinusfunktion den nachfolgenden Graphen:

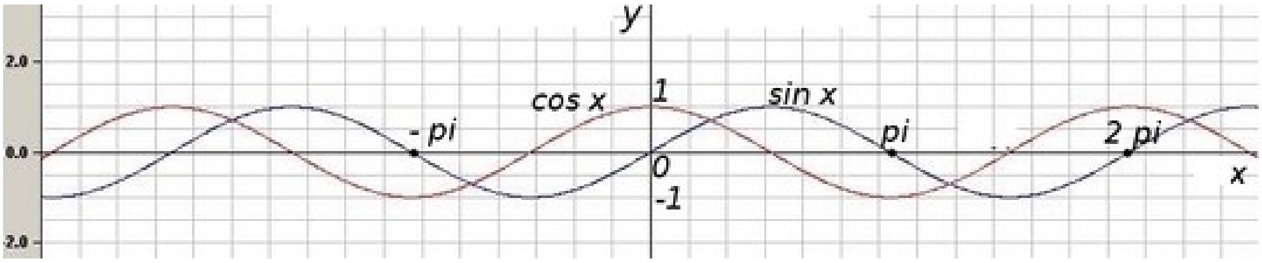


Abb. 8

Aufg. 1: In der nachfolgenden Tabelle Tab. 1 rechnen Sie bitte den Winkel α um in die andere Einheit:

α	b
117°	
419°	
- 154°	
	6,000
	-12,410
	10,730

Tab. 1

<u>Die Ableitung der Sinusfunktion</u>:

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist die Anlage auf Seite 15 (Abb. 9) hilfreich.

1. Lesen Sie sin ' (π / 2) aus Abb. 9 (Anlage) ab.

2. Finden Sie auch sin ' (0) als Grenzwert des zugehörigen Differenzenquotienten.

3. Ermitteln Sie sin ' (π) mithilfe des Ergebnisses unter Nr. 2.

4. Berechnen Sie sin ‘ (k * π / 8) mit k = 1, 2, 3 näherungsweise als Differenzenquotient für $h = 10^{-3}$.

   Sammeln Sie Ihre bisherigen Ergebnisse in der nachfolgenden Tabelle 2.

x	sin ‘ (x)	
0		
π / 8		
2 π / 8		
3 π / 8		
π / 2		
π		

Tab. 2

   Stellen Sie eine Vermutung darüber an, wer sin ‘ (x) ist. Überprüfen Sie Ihre Vermutung. (Tragen Sie numerische Ergebnisse in der leeren Spalte 3 in Tab 2 ein.)

5. Erläutern Sie : cos x = sin (x + π / 2).

   Dann ist cos ' (0) = sin ' (π / 2) = 0 , cos ' (π / 2) = sin ' π = - 1 und cos ' (π) = sin ' (3 / 2 * π) = cos (3 / 2 * π) = 0.

   Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion cos : x --→ cos(x)

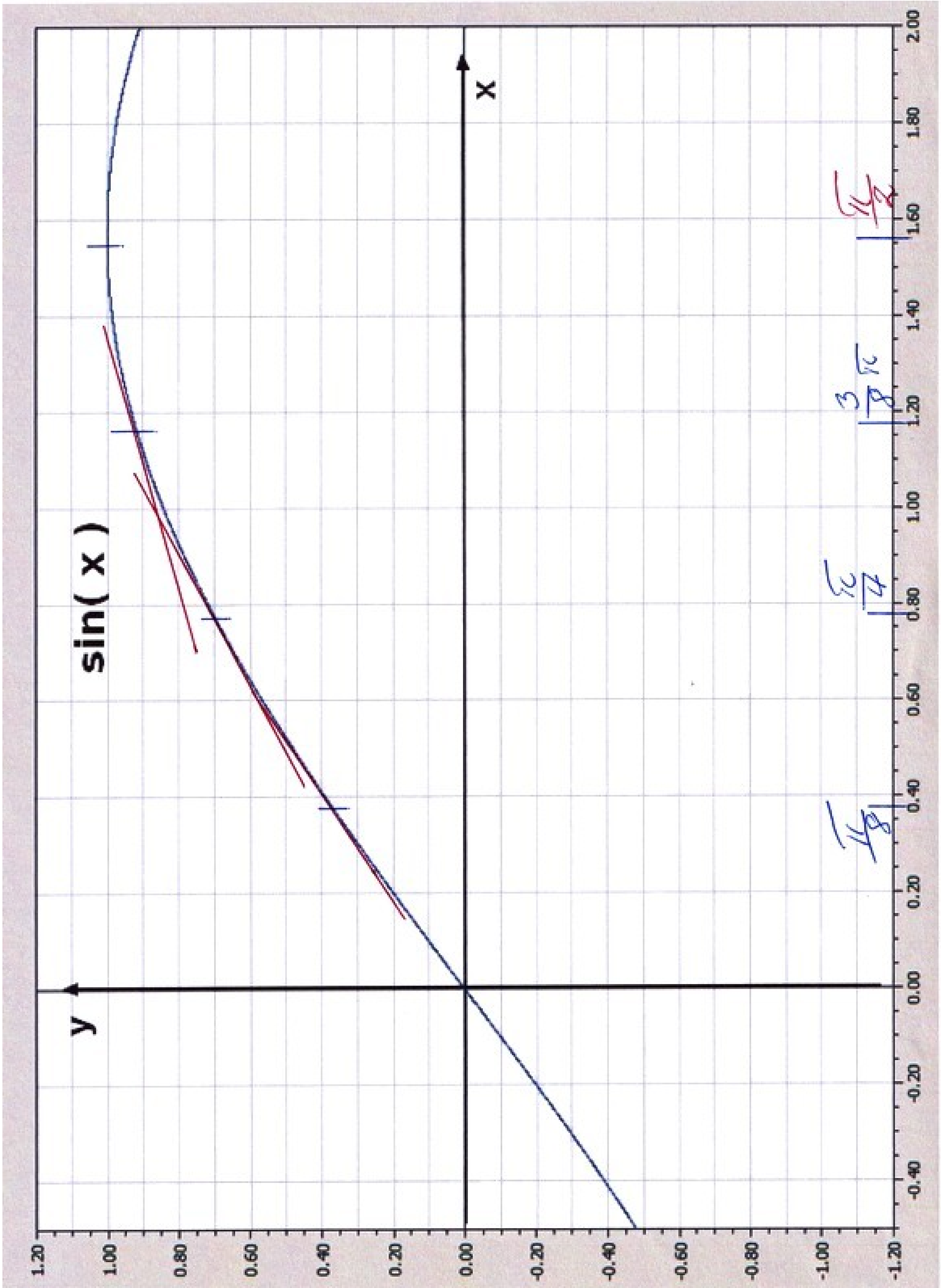


Abb. 9

Ableitung zusammengesetzter Funktionen

Die Summe zweier Funktionen darf summandenweise differenziert werden.

Produktregel der Differenzialrechnung

Wenn es überhaupt eine Regel für das Differenzieren des Produktes zweier Funktionen gibt, dann muss diese auch für ganzrationale Funktionen gelten. Die Produktregel müsste sich entdecken lassen, wenn man Produkte von ganzrationalen Funktionen untersucht. Probieren Sie es!

1. Besonders einfach ist die Untersuchung an der Stelle 0:
   Für eine beliebige ganzrationale Funktion

   $$f : x \text{--->} \ a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots.. + a_1\, x + a_0$$

   hat man: $f(0) = a_o$ und $f'(0) = a_1$.

   Nun sei $f(x) = -4x^2 + 3x + 2$ und $g(x) = 3x^5 + x^2 - 7x + 5$.

   Berechnen Sie $(f \bullet g)'(0)$. Welche Daten von f und g legen $(f \bullet g)'(0)$ fest?

2. Ist $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots.. + a_1\, x + a_0$ und $g(x) = b_n\, x^n + b_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots.. + b_1\, x + b_0$, dann ist

   $$(f \bullet g)(x) = \ldots. + (a_1\, b_0 + a_0\, b_1)\, x + a_0 b_0\ ,$$

   also $(f \bullet g)'(0) = a_0\, b_1 + a_1\, b_0$. Erinnern Sie sich an die Bedeutung von a_0, a_1, b_0 und b_1 (vgl. Aufg. 1), und Sie erkennen, wie die Produktregel lauten muss. (Formulieren Sie diese.)

3. Kontrollieren Sie, ob die unter Nr. 2 gefundene Produktregel auch für von Null verschiedene Stellen gilt. Wählen Sie z.B. für f und g die Funktionen:

   $f(x) = -4x^2 + 3x$ und $g(x) = 3x^5$.

4. Kommentieren Sie die folgende Kontrolle der entdeckten Produkttregel:

   $h(x) = x^3\, x^2$, also $h'(x) = 3x^2\, x^2 + x^3\, 2x = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$.

   Führen Sie eine ähnliche Kontrolle für $h(x) = x^7$ durch.

*

R 4: (<u>Produktregel</u>) Ist f das Produkt zweier anderer Funktion, also $f(x) = g(x) * h(x) = (g\,h)(x)$, und sind g und h differenzierbar, so ist auch f differenzierbar und es gilt:

$$f\,'(x) = (g\,h)\,'(x) = g\,'(x)\,h(x) + g(x)\,h\,'(x).$$

(Der Ableitungsstrich wandert also über das Produkt. Ein Produkt darf <u>nicht</u> faktorweiseweise differenziert werden.)

(Ü 5) Bilden Sie $f\,'(x)$ mithilfe der Produktregel und berechnen Sie sodann $f\,'(1)$, $f\,'(0)$ sowie $f\,'(- 1)$.

5.1 $f(x) = (x^2 – x + 1) (x^3 + 2 x + 1)$

5.2 $f(x) = (x^4 – 2 x^2 + 3 x +1) (x^3 – x^2 + 3 x – 1)$

5.3 $f(x) = (x^2 + x – 1) (x^5 - 4 x^2 + 3 x)$

5.4 $f(x) = (x^3 + 6 x^2 – 4 x + 5) (x^4 – 10 x^3 – 5 x^2 – 8 x + 1)$

(Ü 6) Finden Sie die Ableitung der Funktionen

$$f : x \rightarrow \sqrt{x}\ ,\ x \in \mathbb{R}_{>0}$$

(Ü 7)

7.1 Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion

$$f :\ x \text{ ---> } 1 / x^2 ,\qquad x \in \mathbb{R}^*$$

mithilfe der Produktregel. An welcher Stelle hat f die Steigung – 1?

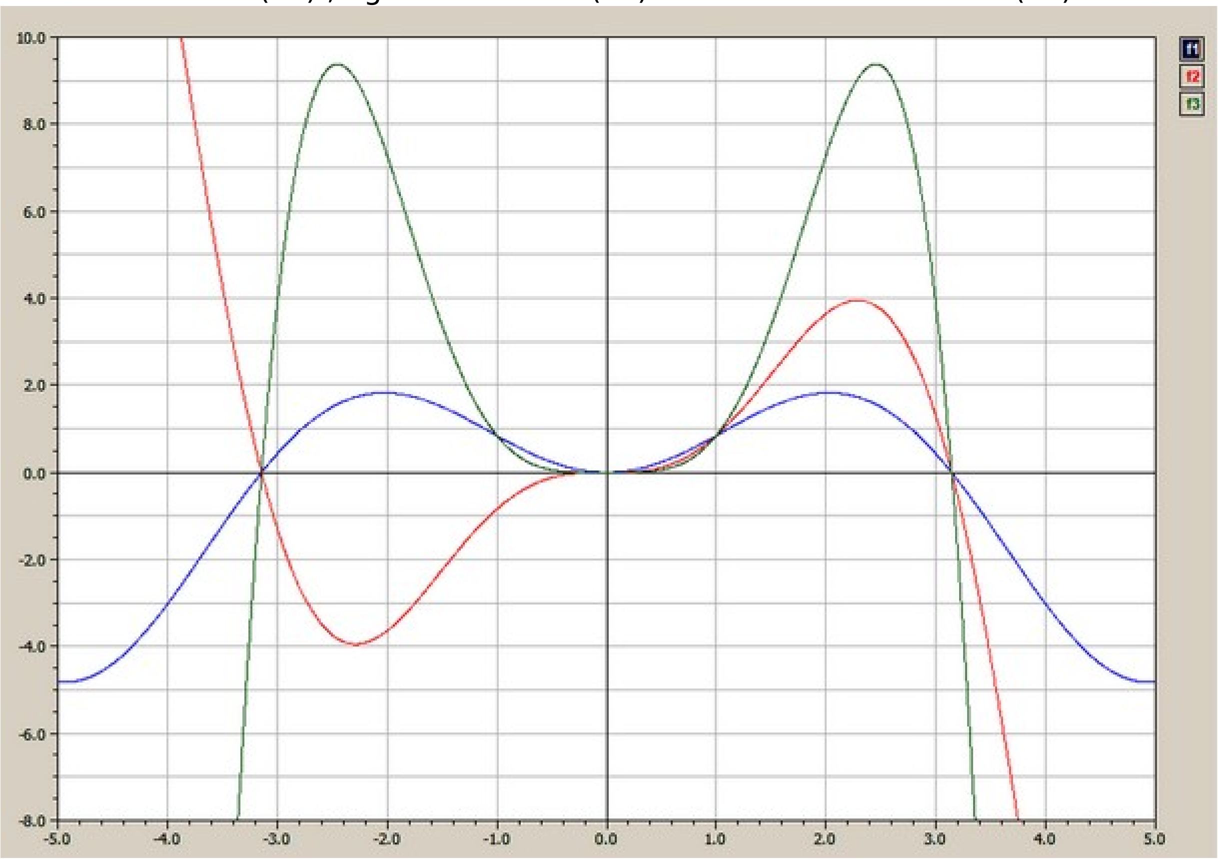
7.2 Ermitteln Sie auch die Ableitung der Funktion

$$g :\ x \text{ ---> } 1 / x^3 ,\qquad x \in \mathbb{R}^*$$

mithilfe der Produktregel. An welcher Stelle hat g die Steigung – 1?

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Graphen der Produkt-Funktionen:

$f : x \to x \sin(x)$, $g : f : x \to x^2 \sin(x)$ und $h : f : x \to x^3 \sin(x)$



1) Ordnen Sie jedem Graphen den Namen der zugehörigen Funktion zu.

2) Untersuchen Sie die auftretenden Symmetrien.

3) Untersuchen Sie, ob die Funktion g im Intervall [π ; 2 π] Extrempunkte besitzt. Berechnen Sie ggf. ihre Koordinaten.

Verkettung von Funktionen

die Funktion „g nach f“

Aus zwei Funktionen f und g lässt sich eine neue Funktion h gewinnen, indem man f und g „nacheinander“ ausführt. (Sehen Sie selber.)

Beispiele: $h_1(x) = (1 + x^2)^3$; $h_2 (x) = \sqrt{3 x – 5}$; $h_3(x) = \dfrac{1}{1 + x^3}$.

$x \xrightarrow{f} 1 + x^2 = f(x) = y \xrightarrow{g} y^3 = g(y) = g(f(x)) = (1 + x^2)^3 = (g \circ f)(x)$

$= h_1 (x)$

$g \circ f$ ist die Funktion mit dem Namen „g nach f“.

$x \xrightarrow{f} 3 x – 5 = f(x) = y \xrightarrow{g} \sqrt{y} = g(y) = g(f(x)) = \sqrt{3 x – 5} = (g \circ f)(x)$

$= h_2 (x)$

$x \xrightarrow{f} 1 + x^3 = f(x) = y \xrightarrow{g} \dfrac{1}{y} = g(y) = g(f(x)) = \dfrac{1}{1 + x^3} = (g \circ f)(x)$

$= h_3 (x)$

Sollte es eine Ableitungsregel für verkettete Funktionen geben, so müsste diese auch auf ganzrationale Funktionen zutreffen. Die Regel müsste sich also wiederum an ganzrationalen Funktionen entdecken lassen.

1) Sind f und g die beiden linearen Funktionen

$f(x) = a x + b$ und $g(x) = c x + d$

so ist auch $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(a x + b) = c(a x + b) + d = ca x + cb + d$ eine lineare Funktion.

Welche Beziehung besteht zwischen den Steigungen (das sind die Ableitungen) der zugehörigen Geraden?

2) Ist f eine beliebige ganzrationale Funktion und $g : x \to b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ eine quadratische Funktion, so ist „g nach f“ offensichtlich wieder eine ganzrationale Funktion:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = b_0 + b_1 f(x) + b_2 f(x)^2$$

Bilden Sie $(g \circ f)' (x)$ und untersuchen Sie, wie man $(g \circ f)' (x)$ aus $f(x)$, $f '(x)$ und $g '(x)$ bilden kann.

3) Wählt man in Nr. 2) für g eine ganzrationale Funktion vom Grad 4, also

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 ,$$

so erhält man

$$(g \circ f)'(x) = b_1 f'(x) + 2 b_2 f(x) f'(x) + 3 b_3 f(x)^2 f'(x) + 4 b_4 f(x)^3 f'(x)$$

Bestätigen Sie diese Gleichung mithilfe der „verallgemeinerten Potenzregel“ (s.u.). Wenn Sie jetzt diese Gleichung für $(g \circ f)'(x)$ so umschreiben, dass die Koeffizienten von g nicht mehr auftreten, dann haben Sie die Regel für die Ableitung einer Verkettung gefunden (kurz: „Kettenregel“).

Die „verallgemeinerte Potenzregel“:

> Wenn $f: x \dashrightarrow f(x)$ eine differenzierbare Funktion ist, dann ist für jede natürliche Zahl n auch die Funktion $f^n: x \dashrightarrow f(x)^n$ differenzierbar und es gilt:
>
> $$(f^n)'(x) = n\, f(x)^{n-1} f'(x)$$

Beweis der Regel: siehe Unterricht

Die Kettenregel wird auf der nachfolgenden Seite 18 formuliert.

(Ü 8) Differenzieren Sie die nachfolgenden Funktionen nach der Kettenregel:

8.1 $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 1}$

8.2 $h(x) = \left(4x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^3$

8.3 $h = g \circ f$ mit $f(x) = 3x + 1$ und $g(x) = 2x^2 + 4x - 1$

(Ü 9) Geben Sie für die Funktion aus Aufg. (Ü 8.3) die Tangentenfunktion t an der Stelle a = - 1 an.

*

R 5: (Kettenregel) Wenn f und g differenzierbare Funktionen sind, dann ist auch $g \circ f$ eine differenzierbare Funktion und es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \bullet f'(x)$$

Anmerkungen: Bei der obigen Formulierung der Kettenregel wird davon ausgegangen, dass die Funktion g für die Funktionswerte f(x) definiert ist. So dass f tatsächlich mit g verkettet werden kann. Ansonsten verkleinert man die Definitionsmenge von f passend. - Die „verallgemeinerte Potenzregel“ braucht man sich nicht zu merken, da sie in der Kettenregel enthalten ist.

Wichtige Anmerkung: Bei der Verkettung von Funktionen darf die „Reihenfolge“ der Funktionen nicht vertauscht werden; es gibt kein „Kommutativgesetz“ für die Verkettung:

$f(x) = x + 4; \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x+4}\ ; \qquad (f \circ g)(x) = \sqrt{x} + 4$

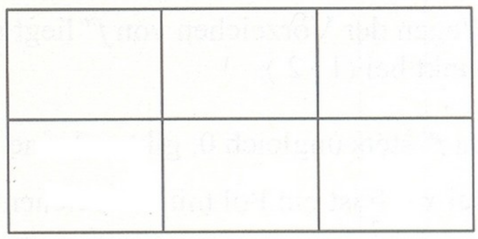
$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$, denn $(g \circ f)(4) = \sqrt{8} \approx 2{,}83$ und $(f \circ g)(4) =$

$\sqrt{4} + 4 = 6$, aber $\sqrt{8} \neq 6$

Optimierungsprobleme

Aufgabe **(Ü 10)**: (Kosten im Tierpark)

Ein Tierpark plant eine rechteckige Fläche als Gehege mit 6 kleineren rechteckigen Bereichen anzulegen (siehe Skizze). Für den Außenzaun ist mit 20 € je Meter, für den Innenzaun mit 10 € je Meter Zaunlänge zu rechnen. Zugänge und Durchgänge bleiben bei der Kalkulation unberücksichtigt.



10.1 Berechnen Sie die Gesamtkosten für alle Zäune zunächst unter der Annahme, dass die Gesamtfläche quadratisch ist und einen Inhalt von 3000 m^2 hat.

10.2 Bestimmen Sie die äußeren Abmessungen für ein 3000 m^2 großes Gehege so, dass die Gesamtkosten für alle benötigten Zäune minimal werden.

10.3 Für den Kauf der Zäune stehen eigentlich nur 5000 € zur Verfügung. Berechnen Sie den maximalen Inhalt der Fläche, welche dann eingezäunt werden könnte.

Aufgabe **(Ü 11)**: (Stahlproduktion)

Eine Fabrik erzeugt Stahl. Das Unternehmen arbeitet unter den Bedingung

$$K(x) = 1/15\ x^3 - 2x^2 + 60x + 200$$

und $$E(x) = 60x.$$

Ermitteln Sie die für das Unternehmen wichtigen Informationen:

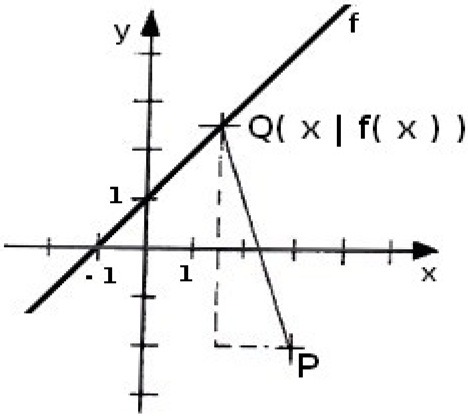
11.1 die Ausbringung, bei welcher der Gewinn maximal wird, 11.2 den maximalen Gewinn,

11.3 die Gewinnzone

Aufgabe **(Ü 12)**: (ein Abstandsproblem)

f sei die lineare Funktionmmit der Gleichung f(x) = x + 1 und P der Punkt P(3 | - 2).

Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes Q auf dem Graphen von f (wir schreiben auch G_f), von dem Q den kleinsten Abstand hat (s. nachfolgende Abbildung).



Q ist nicht der gesuchte Punkt, für den d(P,Q) minimal ist; Q ist lediglich ein Punkt auf G_f

Hinweis: Begründen Sie zunächst den nachfolgenden

Satz:

Zwei Geraden g und h sind genau dann orthogonal zueinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen den Wert „ - 1 " hat: $$g \perp h \iff st_g \bullet st_h = -1$$

*

<u>Aufgabe **(Ü 13)**</u>: (ein Symmetrieproblem / Abi (HMF) – 2021):

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g.
Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse, der Graph von g ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. Beide Graphen haben einen Hochpunkt im Punkt $(2|1)$.

a) **Geben** Sie für die Graphen von f und g jeweils die Koordinaten und die Art eines weiteren Extrempunkts **an**. **(2 BE)**

b) **Untersuchen** Sie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit

$$h(x) = f(x) \cdot (g(x))^3$$

im Hinblick auf eine mögliche Symmetrie ihres Graphen. **(3 BE)**

*